

Фамилия _____ Имя _____

Школа _____ Класс _____

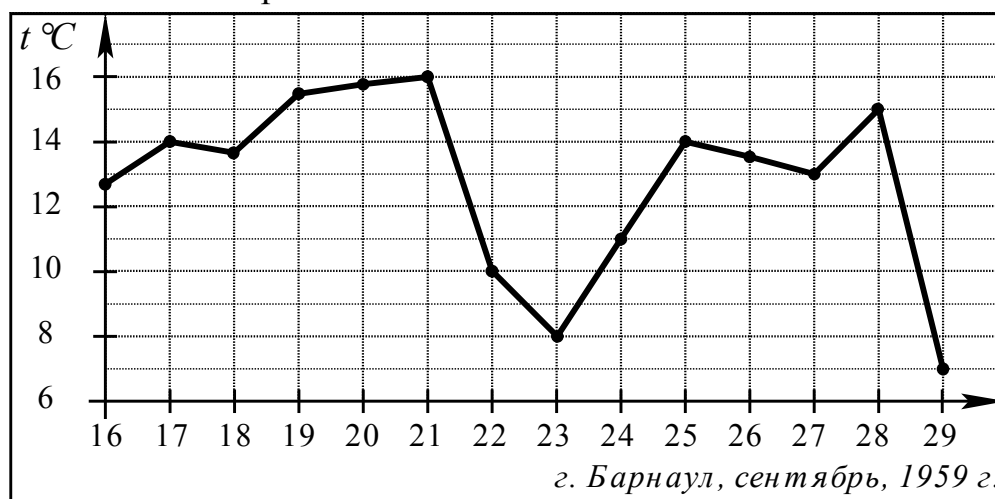
Часть 1

Ответом на задания В1–В12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Кружка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких кружек можно будет купить на 600 рублей после повышения цены на 10%?

Ответ: _____

- В2** На рисунке показано изменение средней дневной температуры в Барнауле во второй половине сентября 1959 г.



Определите по графику, сколько дней сентября средняя дневная температура находилась в пределах от 9 до 12 градусов Цельсия.

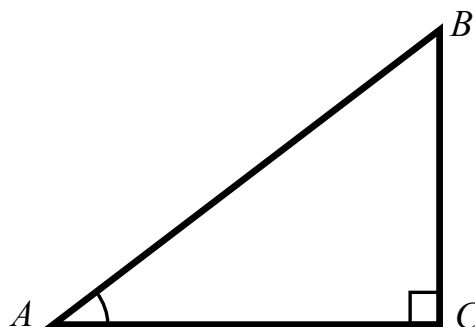
Ответ: _____

- В3** Найдите корень уравнения $\log_2(3 - x) = 4$.

Ответ: _____

- В4** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 15$, $\sin A = 0,8$. Найдите длину стороны AC .

Ответ: _____

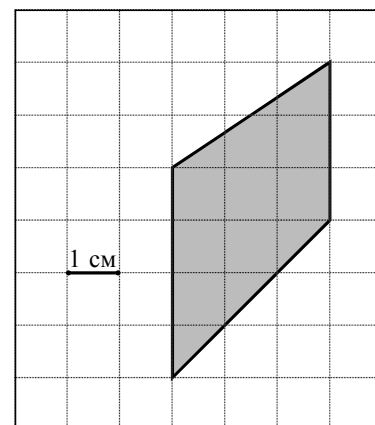


- B5** Строительной фирме нужно приобрести 20 тонн песка у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость (рублей за 1 тонну)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	650	2000	При заказе не менее 20 тонн скидка на доставку 50%
Б	710	2000	При заказе на сумму больше 10 000 руб. доставка бесплатно
В	610	2500	

Ответ: _____

- B6** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



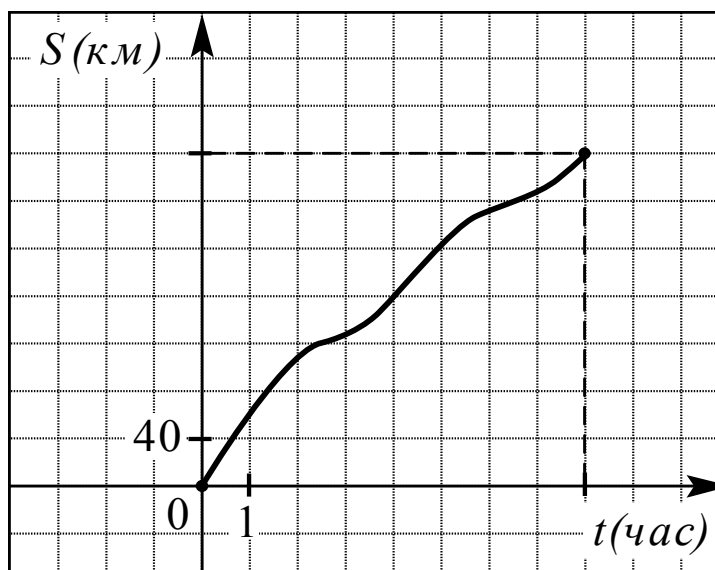
Ответ:

- B7** Вычислите значение выражения $\log_{\sqrt{5}} 8 - \log_{\sqrt{5}} 1,6$.

Ответ: _____

B8

На рисунке изображен график движения грузового автопоезда между двумя городами. На оси абсцисс откладывается время в часах, а на оси ординат – пройденный путь в км.



По графику определите среднюю скорость автопоезда на всем пути. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____

B9

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 40 см. Чтобы наполнить его доверху, требуется 60 л воды. Сейчас в аквариуме от уровня воды до верхнего края 4 см. Сколько литров воды в аквариуме сейчас?

Ответ: _____

B10

При температуре 0°C железнодорожный рельс имеет длину $l_0 = 12,5$ м. При укладке железнодорожного полотна между двумя рельсами оставили зазор 6 мм. При нагреве происходит тепловое расширение металла, и длина рельса меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой наименьшей температуре исчезнет зазор между рельсами? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Ответ: _____

B11 Найдите корень уравнения $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Ответ: _____

B12 Речной теплоход в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Простояв в пункте В 1 час, теплоход отправился обратно и вернулся в А в 15:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если собственная скорость теплохода равна 16 км/ч.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

C3 Решите неравенство $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2 \log_2 x} \geq 2 \log_2 x$.

C4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

С1

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение не верно только из-за того, что не учтен знак выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Ответ не точен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемое выражение обращается в 0	2
Решение содержит верные содержательные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все варианты уравнения. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из вариантов уравнения составлено верное условие на параметр, либо (построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С6

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно составлена система необходимых и достаточных условий на пару искомых чисел, но не объяснено, почему перебор ограничен только перечисленными случаями	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведен перебор возможных пар (возможно неполный) на основе составленных условий на пару искомых чисел, но с арифметическими ошибками или пробелами.	2
Приведена правильная пара и проверено, что она подходит в уравнение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, при этом из второго уравнения следует, что $x = (-1)^k$.

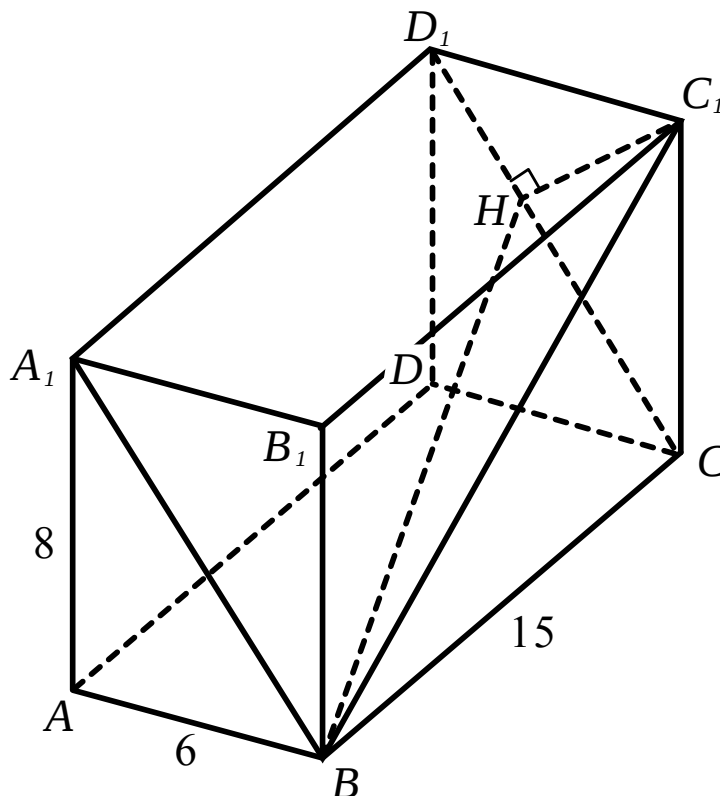
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x = 3$ или $x = -\frac{1}{2}$.

При $x = 3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x = -\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y > 0$, получаем: $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k), (-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Сечение плоскостью $A_1 BC$ есть прямоугольник $A_1 BCD_1$.



Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1 . BH – проекция BC_1 на плоскость A_1BC . Значит, нужно найти угол C_1BH .

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin \frac{24}{85}$.

С3 Решите неравенство $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x$.

Сделаем замену: $y = \log_2 x$. Получаем: $\frac{y-5}{1-2y} \geq 2y$; $\frac{4y^2 - y - 5}{2y-1} \leq 0$;
 $\frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1} \leq 0$.

Тогда $y \leq -1$ или $\frac{1}{2} < y \leq \frac{5}{4}$.

Сделаем обратную замену: $\begin{cases} \log x \leq -1, \\ 0,5 < \log x \leq 1,25; \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}. \end{cases}$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}$.

С4 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE . Найдите длину отрезка DE , если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Обозначим $BD = y$, $BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и
 $\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}$, откуда $\begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases} z=1,6; y=1,8$,
 $AB = 3,6$, $BC = 4,8$.
 $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{3,6^2 + 4,8^2 - 6^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4,8} = 0$. Значит, $\angle B = 90^\circ$.

Тогда $ED^2 = y^2 + z^2 = 1,6^2 + 1,8^2 = 5,8$.

Ответ: $\sqrt{5,8}$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

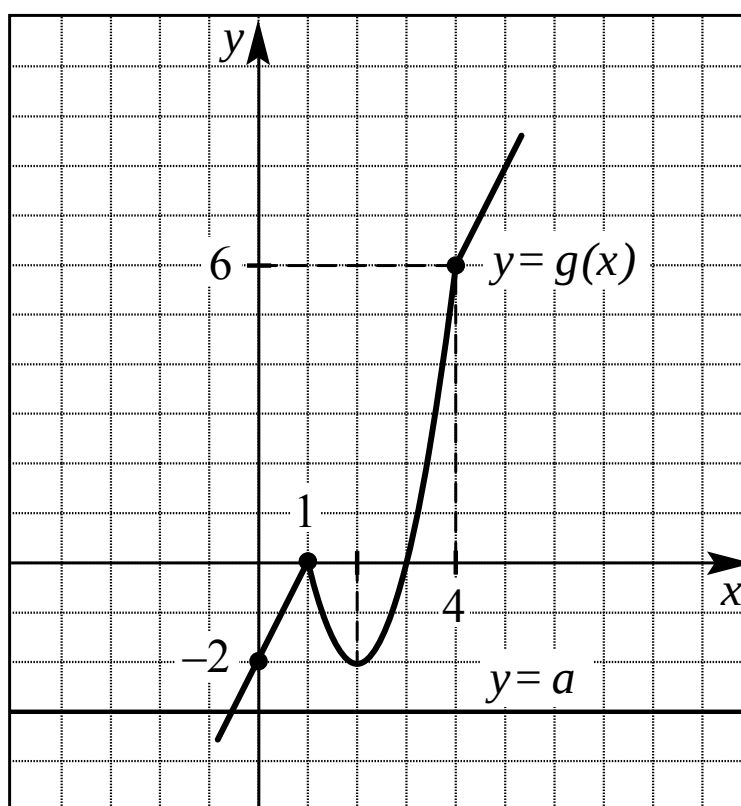


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \leq g(2)$ или $a \geq g(1)$.

$$g(2) = -2; g(1) = 0.$$

Ответ: $a \leq -2$, $a \geq 0$.

C6

Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Пусть n – четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть – произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n – нечетное число. Все нечетные степени тройки (3, 27, 243, ...) делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.